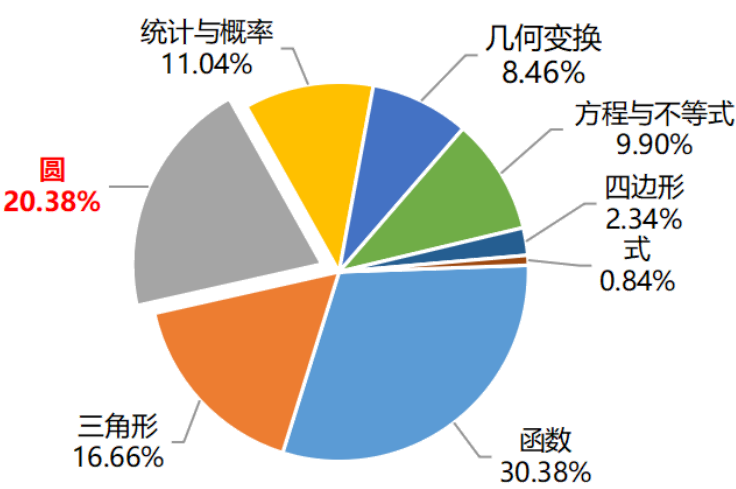


第1讲 圆的三大定理

圆属于人教版教材第二十四章的内容，本模块《圆的综合》，重点包括垂径定理、圆周角定理、切线、圆中的计算等重要知识点，同时也需要学生在理解概念的基础上，研究圆中的最值问题，总结一定的解题思路。

本模块难度适中，其中圆中最值部分难度较大，适用于基础知识的夯实及综合应用，本模块分为圆的三大定理、圆的综合、正多边形和圆与圆中的计算3讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
垂径定理	★★★	高
弧、弦、圆心角关系定理	★★★	高
圆周角定理及圆内接四边形	★★★★	高
直线与圆的位置关系	★★★★	高
圆中最值问题	★★★★★	中
正多边形与圆	★★★	中
圆中的计算	★★★	中

一、垂径定理

垂径定理

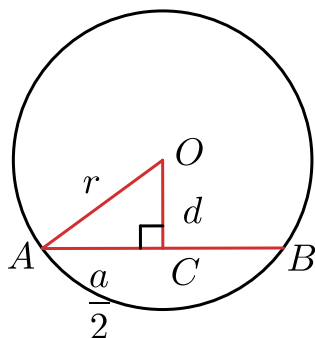
垂径定理：垂直于弦的_____平分这条弦，并且平分弦所对的两条_____.

垂径定理推论：平分弦（ ）的 垂直于弦，并且平分弦所对的两条 。

应用垂径定理与推论进行计算时，往往要构造如下图所示的直角三角形，

根据垂径定理与勾股定理有： $r^2 = d^2 + (\frac{a}{2})^2$ （ r 、 d 、 $\frac{a}{2}$ 的关系），

根据此公式，在 a ， r ， d 三个量中知道任何两个量就可以求出第三个量；当题目给出的已知条件不满足“已知两条边的长度，求第三条边”时，可以通过**设未知数**，列勾股定理方程进行解题。



【备注】 1、若一条直线具备以下五点中的任意两点：

① 过圆心；② 垂直于弦；③ 平分弦（不是直径）；④ 平分弦所对的优弧；⑤ 平分弦所对的劣弧；则必然具备其余三条，简称“知二推三”。

注意：只可以直接适用于客观题，不能体现在解答题的作答过程

2、垂径定理反映的是经过圆心的直线和圆中弦的关系，“要求弦长，先求弦长的一半”，注意对由半径、半弦长和弦心距构成的直角三角形模型的理解和应用。

3、在同圆中，利用垂径定理的知识，若已知弦长相等，则弦心距也相等，反之也成立。

举个“栗”子

栗子1

1. 2017~2018学年天津天津外国语大学附属外国语学校初三期中第5题3分 ★★

下列说法中正确的有() .

- ①垂直平分弦的直线经过圆心；
- ②平分弦的直径一定垂直于弦；
- ③一条直线平分弦，那么这条直线垂直这条弦；
- ④平分弦的直线，必定过圆心；
- ⑤平分弦的直径，平分这条弦所对的弧。

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】 A

【解析】 垂直于弦的直径平分弦，符合垂径定理，故①正确．

命题②，两条直径是相互平分的， $\therefore$ ②错误．

命题③，平分弦的直线不是直径一定不垂直这条弦，故③错误．

命题④，平分弦的直线不是直径则一定不过圆心，故命题④错误．

命题⑤，平分弦的直径不一定平分这条弦所对的弧，

$\therefore$ 当弦是直径时，任意两条直径互相平分，但不垂直，也不平分这条弦所对的弧，故⑤错误．

故 1 个命题正确．

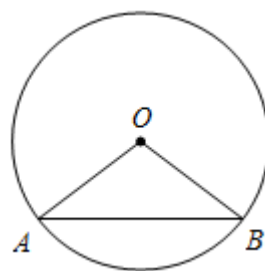
【标注】 【能力】 推理论证能力

【知识点】 垂径定理以及应用

栗子2

2. 2017~2018学年天津天津外国语大学附属外国语学校初三期中第6题3分 ★★★

如图，已知 $\odot O$ 的半径为 5，弦 $AB = 8$ ，则 $\odot O$ 上到弦 AB 所在直线的距离为 2 的点有（ ）．



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 C

【解析】 如图： $\because OD = OA = OB = 5$ ， $OE \perp AB$ ， $OE = 3$ ，

$\therefore DE = OD - OE = 5 - 3 = 2\text{cm}$ ，

$\therefore$ 点 D 是圆上到 AB 距离为 2 的点，

$\because OE = 3\text{cm} > 2\text{cm}$ ，

$\therefore$ 在 OD 上截取 $OH = 1\text{cm}$ ，

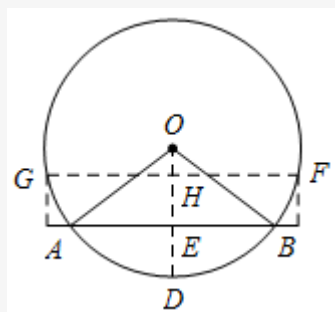
过点 H 作 $GF \parallel AB$ ，交圆与点 G ， F 两点，

则有 $HE \perp AB$ ， $HE = OE - OH = 2\text{cm}$ ，

即点 G ， F 到 AB 的距离为 2cm，

$\therefore$ 点 G ， F 也是圆上到 AB 的距离为 2cm 的点．

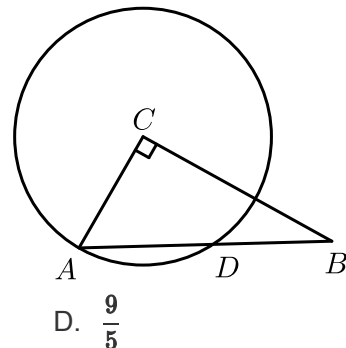
故 C 正确．



【标注】【知识点】垂径定理以及应用

3. 2019~2020学年9月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第11题3分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，以点 C 为圆心， CA 为半径的圆与 AB 交于点 D ，则 AD 的长为（ ）。



A. $\frac{18}{5}$

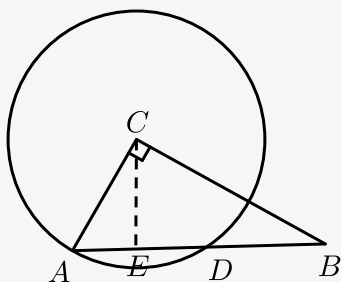
B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{24}{5}$

D. $\frac{9}{5}$

【答案】A

【解析】过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E ，



则 $AE = DE$ ，

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 3, BC = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CE,$$

$$\therefore CE = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \frac{9}{5},$$

$$\therefore AD = 2AE = \frac{18}{5}.$$

故选 A.

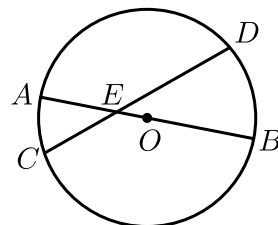
【标注】【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

【知识点】垂径定理以及应用

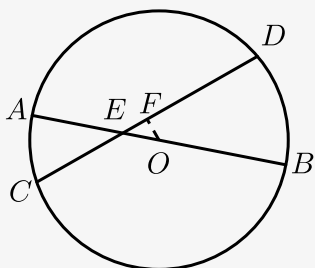
4. 2018~2019学年天津河东区天津市第七中学初三上学期期中（第三学片）第23题10分 ★★★

如图， $\odot O$ 的直径 AB 和弦 CD 相交于 E ，若 $AE = 2\text{cm}$ ， $BE = 6\text{cm}$ ， $\angle CEA = 30^\circ$ ，求 CD 得长。



【答案】 $2\sqrt{15}\text{cm}$.

【解析】 过 O 作 $OF \perp CD$ 于点 F ,



$$\therefore \angle CEA = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle OEF = 30^\circ ,$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}OE = 1 ,$$

$$\therefore CF^2 = OC^2 - OF^2 , CF = \sqrt{15} ,$$

$$\therefore CD = 2CF = 2\sqrt{15}\text{cm} .$$

【标注】 【方法】 图象法

【知识点】 垂径定理以及应用

【能力】 运算能力

【思想】 数形结合思想

栗子3

5. 2015~2016学年天津南开区初三上学期期中第16题3分 ★★★

若小唐同学掷出的铅球在场地上砸出一个直径约为 10cm 、深约为 2cm 的小坑，则该铅球的直径约为 _____ cm .

【答案】 14.5

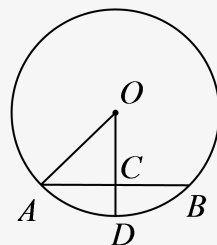
【解析】 根据题意，画出图形如图所示，由题意知， $AB = 10$ ， $CD = 2$ ， OD 是半径，且

$$OC \perp AB , \therefore AC = CB = 5 , \text{ 设铅球的半径为 } r , \text{ 则 } OC = r - 2 ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中，根据勾股定理， $OC^2 + AC^2 = OA^2$ ，即 $(r - 2)^2 + 5^2 = r^2$ ，解得

$$r = 7.25 ,$$

所以铅球的直径为： $2 \times 7.25 = 14.5 \text{ cm}$.



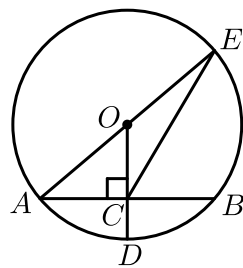
【标注】【能力】抽象概括能力

【知识点】垂径定理以及应用

栗子4

6. 2020~2021学年天津南开区初三上学期中第22题10分 ★★★

如图， $\odot O$ 的半径 $OD \perp$ 弦 AB 于点 C ，连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 E ，连接 EC 。若 $AB = 8$ ， $CD = 2$ ，求 EC 的长。



【答案】 $2\sqrt{13}$.

【解析】 连接 BE ，如图，

$\because OD \perp AB$ ，

$$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

设 $AO = x$ ，则

$$OC = OD - CD = x - 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACO$ 中， $\because$

$$AO^2 = AC^2 + OC^2,$$

$$\therefore x^2 = 4^2 + (x - 2)^2, \text{ 解得 } x = 5,$$

$$\therefore AE = 10, OC = 3,$$

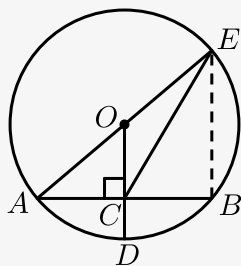
$\because AE$ 是直径，

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ,$$

$\because OC$ 是 $\triangle ABE$ 的中位线，

$$\therefore BE = 2OC = 6,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CBE \text{ 中, } CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}.$$



【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】垂径定理以及应用

栗子5

7. 2015年天津南开区初三中考二模第8题3分 ★★★

已知 $\odot O$ 的直径 $CD = 10\text{cm}$ ， AB 是 $\odot O$ 的弦， $AB \perp CD$ ，垂足为 M ，且 $AB = 8\text{cm}$ ，则 AC 的长为（ ）。

A. $2\sqrt{5}\text{cm}$

B. $4\sqrt{5}\text{cm}$

C. $2\sqrt{5}\text{cm}$ 或 $4\sqrt{5}\text{cm}$

D. $2\sqrt{3}\text{cm}$ 或 $4\sqrt{3}\text{cm}$

【答案】C

【解析】连接 AC ， AO ，

$\because \odot O$ 的直径 $CD = 10\text{cm}$ ， $AB \perp CD$ ， $AB = 8\text{cm}$ ，

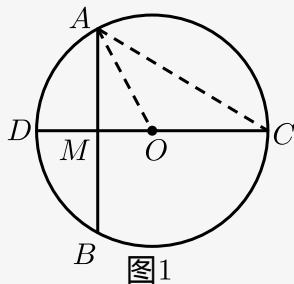
$\therefore AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4\text{cm}$ ， $OD = OC = 5\text{cm}$ ，

当 C 点位置如图1所示时，

$\because OA = 5\text{cm}$ ， $AM = 4\text{cm}$ ， $CD \perp AB$

，

$\therefore$



$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}，$$

$\therefore CM = OC + OM = 5 + 3 = 8\text{cm}$ ，

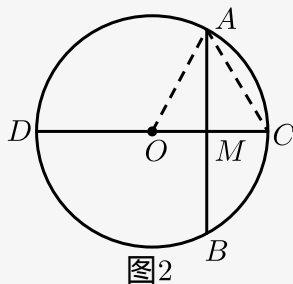
$\therefore AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}\text{cm}$ 。

当 C 点位置如图2所示时，同理可得 $OM = 3\text{cm}$ ，

$\because OC = 5\text{cm}$ ，

$\therefore MC = 5 - 3 = 2\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中，



$$AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\text{cm}。$$

【标注】【知识点】圆与勾股

【知识点】垂径定理以及应用

8. 2014~2015学年9月江苏南京栖霞区南京外国语学校仙林分校初三上学期月考第5题2分 ★★

⊙O的半径为10cm，两平行弦AC，BD的长分别为12cm，16cm，则两弦间的距离是（ ）。

- A. 2cm B. 14cm C. 6cm或8cm D. 2cm或14cm

【答案】D

【解析】如图1，作 $OE \perp AC$ 垂足为E，交BD于点F，

$\because OE \perp AC, AC \parallel BD,$

$\therefore OF \perp BD,$

$\therefore AE = \frac{1}{2}AC = 6\text{cm}, BF = \frac{1}{2}BD = 8\text{cm},$

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，由勾股定理得，

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = 8\text{cm},$$

同理可得 $OF = 6\text{cm},$

$\therefore EF = OE - OF = 8 - 6 = 2\text{cm}.$

如图2，同理可得 $EF = OE + OF = 8 + 6 = 14\text{cm}.$

综上所述两弦之间的距离为2cm或14cm，

故选D。

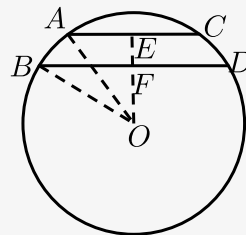


图 1

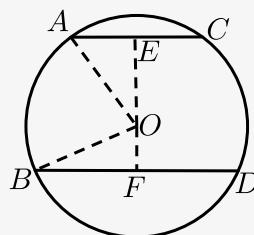


图 2

【标注】【思想】数形结合思想

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

【知识点】圆与勾股

【知识点】垂径定理以及应用

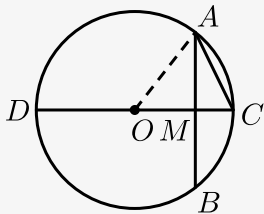
9. 2019年辽宁鞍山初三中考一模第7题3分 ★★★

已知⊙O的直径 $CD = 4$ ，AB是⊙O的弦， $AB \perp CD$ ，垂足为M，且 $AB = 2\sqrt{3}$ ，则 $\angle ACD$ 等于（ ）。

- A. 30° B. 60° C. 30° 或 60° D. 45° 或 60°

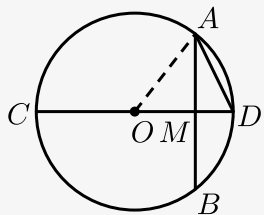
【答案】C

【解析】连接OA，



$\because CD$ 是 $\odot O$ 的直径, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB \perp CD$,
 $\therefore \angle AMO = 90^\circ$, $AM = BM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$,
 $\because AO = \frac{1}{2}CD = 2$,
 $\therefore$ 由勾股定理得: $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$,
 $\therefore OM = \frac{1}{2}OA$,
 $\therefore \angle OAM = 30^\circ$,
 $\therefore \angle AOC = 60^\circ$,
 $\because OA = OC$,
 $\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle ACD = 60^\circ$.

当 C 和 D 互换一下位置, 如图,



$\because CD$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \angle CAD = 90^\circ$,
 $\therefore$ 此时 $\angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$;
 所以 $\angle ACD = 30^\circ$ 或 60° .
 故选: C.

【标注】【知识点】圆与勾股

二、弧、弦、圆心角关系定理

弧、弦、圆心角
关系定理

在____圆或____圆中，相等的圆心角所对的____相等，所对的____也相等。

在____圆或____圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的____相等，所对的____相等。

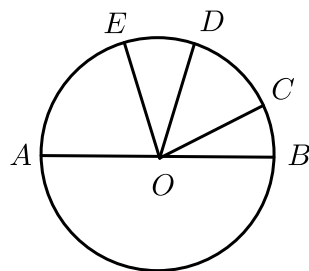
在____圆或____圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的____相等，所对的____和____分别相等。

- 【备注】** 1、在同圆或等圆中，圆心角等 $\Leftrightarrow$ 弧等 $\Leftrightarrow$ 弦等 $\Leftrightarrow$ 弦心距等。
2、在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，弦心距也相等。
3、由圆心角等 $\Leftrightarrow$ 弧等 $\Leftrightarrow$ 弦等的大前提是在同圆或等圆中。
4、因为一条弦对的弧有两条，所以由弦等得出弧等时，这里的弧等指的是弦对的劣弧与劣弧对应相等，优弧与优弧对应相等。

栗子6

10. 2017~2018学年天津和平区初三上学期期中第15题3分 ★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弧 $BC =$ 弧 $CD =$ 弧 DE ， $\angle AOE = 72^\circ$ ，则 $\angle COD$ 的大小 = _____（度）。



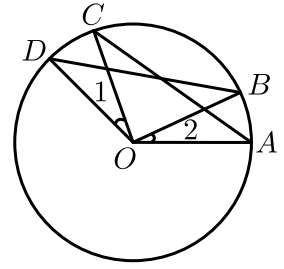
【答案】 36°

【解析】 $\because$ 弧 $BC =$ 弧 $CD =$ 弧 DE ， $\angle AOE = 72^\circ$ ，
 $\therefore \angle BOC = \angle COD = \angle DOE$ ，
 $\therefore \angle BOC = 36^\circ = \angle COD = \angle DOE$ 。

【标注】 【知识点】弧、弦、圆心角关系

11. 2019~2020学年10月天津河北区天士力中学初三上学期月考第11题5分 ★★

如图，已知 A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的点， $\angle 1 = \angle 2$ ，则下列结论中正确的有 _____。（写出序号）①弧 $AB =$ 弧 CD ；②弧 $BD =$ 弧 AC ；③ $AC = BD$ ；④ $\angle BOD = \angle AOC$ 。



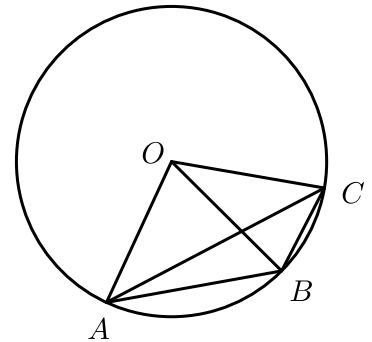
【答案】 ①②③④

【解析】 $\because \angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore \widehat{CD} = \widehat{AB}$, $\angle DOB = \angle AOC$,
 $\therefore \widehat{BD} = \widehat{AC}$,
 $\therefore AC = BD$,
 $\therefore$ ①②③④正确 .

【标注】 【知识点】 弧、弦、圆心角关系

12. 2016~2017学年北京大兴区初三上学期期末第9题3分 ★★

如图 , A, B, C 是 $\odot O$ 上三个点 , $\angle AOB = 2\angle BOC$, 则下列说法中正确的是 () .



A. $\angle OBA = \angle OCA$

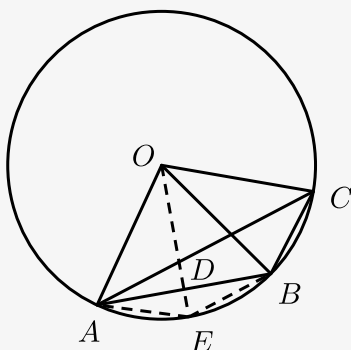
B. 四边形 $OABC$ 内接于 $\odot O$

C. $AB = 2BC$

D. $\angle OBA + \angle BOC = 90^\circ$

【答案】 D

【解析】 过 O 作 $OD \perp AB$ 于 D 交 $\odot O$ 于 E ,

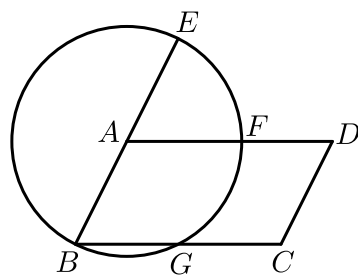


则 $\widehat{AE} = \widehat{BE}$,
 $\therefore AE = BE$, $\angle AOE = \angle BOE = \frac{1}{2} \angle AOB$,
 $\therefore \angle AOB = 2\angle BOC$,
 $\therefore \angle AOE = \angle BOE = \angle BOC$,
 $\therefore \widehat{AE} = \widehat{BE} = \widehat{BC}$,
 $\therefore AE = BE = BC$,
 $\therefore 2BC > AB$, 故 C 错误 ;
 $\therefore OA = OB = OC$,
 $\therefore \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = 90^\circ - \angle BOC$,
 $\angle OCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = 90^\circ - \frac{3}{2}\angle BOC$,
 $\therefore \angle OBA \neq \angle OCA$, 故 A 错误 ;
 $\therefore$ 点 A , B , C 在 $\odot O$ 上 , 而点 O 在圆心 ,
 $\therefore$ 四边形 OABC 不内接于 $\odot O$, 故 B 错误 ;
 $\therefore \angle BOE = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB$,
 $\therefore \angle BOE + \angle OBA = 90^\circ$,
 $\therefore \angle OBA + \angle BOC = 90^\circ$, 故 D 正确 ;
 故选 D .

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

13. 2018~2019学年江苏苏州高新区苏州高新区实验初中初三上学期期末第22题6分 ★★★

如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, 以 A 为圆心, AB 为半径的圆分别交 AD 、 BC 于点 F 、 G , 交 BA 的延长线于点 E , 求证: $\widehat{EF} = \widehat{FG}$.



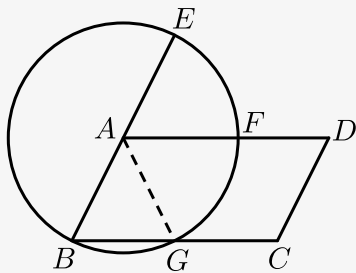
【答案】 证明见解析 .

【解析】 连接 AG .

$\therefore A$ 为圆心 , $\therefore AB = AG$,
 $\therefore \angle ABG = \angle AGB$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 ,
 $\therefore AD \parallel BC$, $\angle AGB = \angle DAG$, $\angle EAD = \angle ABG$,

$$\therefore \angle DAG = \angle EAD ,$$

$$\therefore \widehat{EF} = \widehat{FG} .$$



【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

三、圆周角定理及圆内接四边形

圆周角定理

圆周角定理：一条弧所对的_____等于它所对的_____的一半。

圆周角定理推论

_____弧或_____弧所对的圆周角_____。

半圆（或直径）所对的圆周角是_____；
_____的圆周角所对的弦是_____。

【备注】圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等。

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径。

【注意】一般情况下，当条件中有直径时，往往做出直径所对的圆周角，从而得到直角三角形。

圆内接四边形

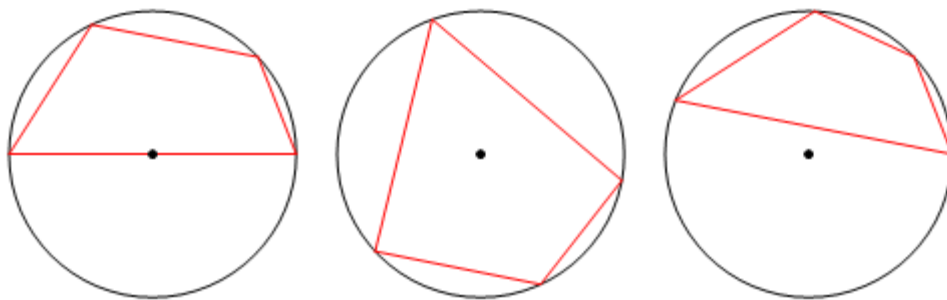
圆内接多边形（多边形的外接圆）：如果一个多边形的_____顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做_____，这个圆叫做这个多边形的_____。

圆内接四边形性质：圆内接四边形的_____，并且任何一个外角都等于它的_____。

【备注】1、四个顶点都在圆上的四边形叫做圆的内接四边形。

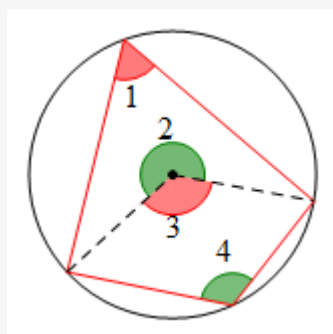
【注意】确定是不是圆内接四边形，一定要看四边形的四个顶点是不是都在圆周上。

常见的圆内接四边形：



2、圆内接四边形的性质：圆的内接四边形的对角互补。

证明：



根据圆周角定理可知

$$\angle 3 = 2\angle 1, \angle 2 = 2\angle 4,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle 1 + 2\angle 4 = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ.$$

同理可证四边形的另一组对角的和也为 180° 。

所以圆内接四边形对角互补。

！ 总结：

(1) 有关弧的中点引辅助线的方法：

① 连过弧中点的半径；

② 连等弧对的弦；

③ 连等弧对的圆心角。

(2) 有关弦中点的引辅助线的方法：连过弦中点的半径。

(3) 求弧的度数：构造弧所对的圆心角。

(4) 已知直径：构造直径所对的圆周角。

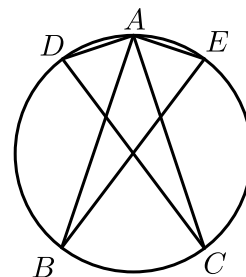
(5) 比较弧的大小，可以转化成比较弦、圆心角的大小。

(6) 有线段的倍分关系时，常利用“折半、加倍”的方法做辅助线。

栗子7

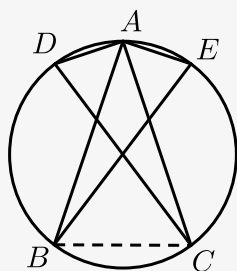
14. ★★

如图， $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABE$ 都内接于同一个圆，则 $\angle ADC + \angle AEB + \angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 180°

【解析】 连接 BC ，如图所示，



$\because \angle ABC = \angle ADC$ ， $\angle AEB = \angle ACB$ ，且 $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ ，

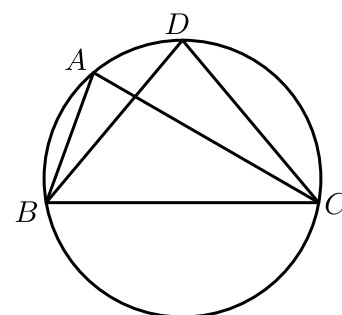
$\therefore \angle ADC + \angle AEB + \angle BAC = 180^\circ$ 。

故答案为： 180° 。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

15. 2019~2020学年北京西城区北京四十三中初三上学期期中第5题2分 ★★

如图， A, B, C 三点在已知的圆上，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 70^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， D 是 $\widehat{BAC}$ 的中点，连接 DB, DC ，则 $\angle DBC$ 的度数为（ ）。



A. 30°

B. 45°

C. 50°

D. 70°

【答案】 C

【解析】 由题知 $\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle BDC = \angle BAC = 80^\circ$ ，

$\because D$ 是 $\widehat{BAC}$ 的中点，

$\therefore BD = CD$ ，

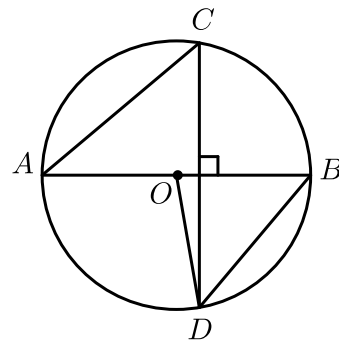
$$\therefore \angle DBC = \frac{180^\circ - \angle BDC}{2} = 50^\circ .$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

栗子8

16. 2020~2021学年天津塘沽区初三上学期期中（第二共同体）第7题3分 ★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ， $\angle CAB = 40^\circ$ ，则 $\angle BOD$ 的度数等于（ ）。



A. 80°

B. 50°

C. 70°

D. 60°

【答案】A

【解析】 $\because AB$ 是 $\odot O$ 直径， CD 是 $\odot O$ 的弦，

$$AB \perp CD ,$$

$$\therefore \widehat{CB} = \widehat{DB} ,$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle CAB ,$$

$$\because \angle CAB = 40^\circ ,$$

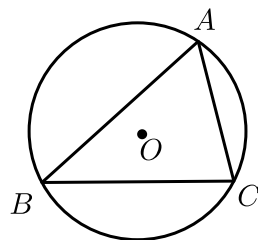
$$\therefore \angle BOD = 80^\circ .$$

故选：A .

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

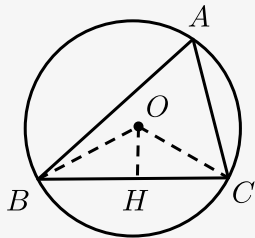
17. 2020~2021学年天津南开区初三上学期期中第16题3分 ★★

如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， $\angle A = 60^\circ$ ， $BC = 6\sqrt{3}$ ，则 $\odot O$ 的半径是 _____ 。



【答案】6

【解析】



过点 O 作 $OH \perp BC$ 交 BC 于 H 点，

连接 OB ， OC ，

$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle COH = \frac{1}{2}\angle BOC = 60^\circ,$$

$$\because OH \perp BC,$$

$$\therefore CH = \frac{1}{2}BC = 3\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle COH$ 中， $\angle COH = 60^\circ$ ，

$$\therefore OC = \frac{CH}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times 2 = 6.$$

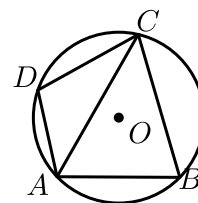
【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】圆与三角函数

18. 2020~2021学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第11题 ★★

如图，四边形 $ABCD$ 内接于半径为 6 的 $\odot O$ 中，连接 AC ，若 $AB = CD$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle BAC$ ，则 BC 的长度为（ ）。



A. $6\sqrt{3}$

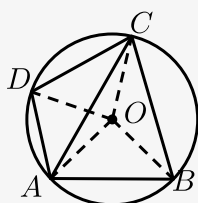
B. $6\sqrt{2}$

C. $9\sqrt{3}$

D. $9\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】如图，连接 OA ， OB ， OC ， OD ，



$$\because \angle ACB = 45^\circ,$$

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$,
 $\because AB = CD$,
 $\therefore \angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$,
 $\because \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BAC$,
 $\therefore \angle AOD + \angle BOC = 2\angle ACD + 2\angle BAC$
 $= \angle BAC + 2\angle BAC$
 $= 3\angle BAC$
 $= 180^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BOC = 120^\circ$,
 $\therefore \angle BC = \sqrt{3}OB = 6\sqrt{3}$.
 故选 A .

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

栗子9

19. 2021年天津和平区初三中考一模第21题10分 ★★★

已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 是 $\odot O$ 的弦，连接 BD .

(1) 如图 1，连接 OC ， AD . 若 $\angle ADC = 56^\circ$ ，求 $\angle CDB$ 及 $\angle COB$ 的大小 .

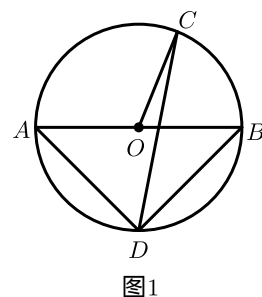


图1

(2) 如图 2，过点 C 作 DB 的垂线，交 DB 的延长线于点 E ，连接 OD . 若 $\angle ABD = 2\angle CDB$ ， $\angle ODC = 20^\circ$ ，求 $\angle DCE$ 的大小 .

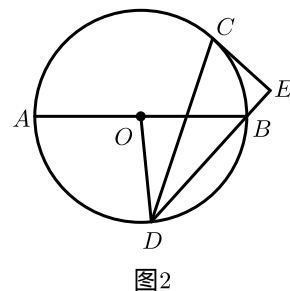


图2

【答案】(1) $\angle CDB = 34^\circ$; $\angle COB = 68^\circ$.

(2) 70° .

【解析】 (1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

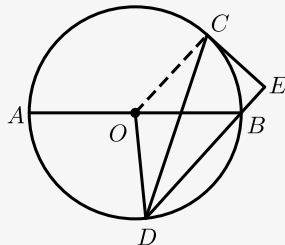
$$\therefore \angle ADB = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle ADC = 56^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle ADB - \angle ADC = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = 2\angle CDB = 68^\circ .$$

(2) 连接 OC .



$$\therefore \angle ABD = 2\angle CDB, \angle COB = 2\angle CDB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle COB,$$

$$\therefore OC \parallel BD,$$

$$\therefore \angle OCE + \angle E = 180^\circ .$$

$$\therefore CE \perp BD,$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCE = 90^\circ .$$

$$\because OC = OD,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC = 20^\circ,$$

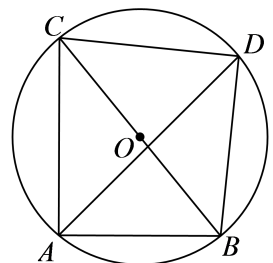
$$\therefore \angle DCE = \angle OCE - \angle OCD = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ .$$

【标注】 【知识点】 圆周角定理以及应用

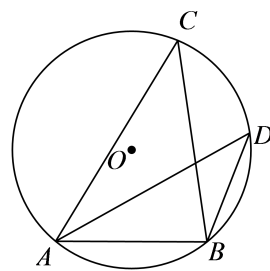
20. 2020~2021学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第22题 ★★★

已知 $\odot O$ 直径为10, 点 A , 点 B , 点 C 在 $\odot O$ 上, $\angle CAB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D .

(1) 如图①, 若 BC 为 $\odot O$ 的直径, 求 BD , CD 的长.



(2) 如图②, 若 $\angle CAB = 60^\circ$, 求 BD , BC 的长.



【答案】(1) $BD = CD = 5\sqrt{2}$.

(2) $BD = 5$, $BC = 5\sqrt{3}$.

【解析】(1) 连接 OD ,

$\because BC$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle CAB = \angle BDC = 90^\circ$

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$\widehat{CD} = \widehat{BD}$,

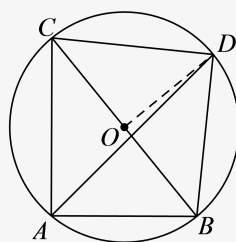
$\therefore \angle COD = \angle BOD$,

$\therefore CD = BD$,

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, $BC = 10$, $CD^2 + BD^2 = BC^2$,

$\therefore BD^2 = CD^2 = 50$,

$\therefore BD = CD = 5\sqrt{2}$.



(2) 如图, 连接 OB , OD ,

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$, 且

$\angle CAB = 60^\circ$,

$\therefore$

$\angle DAB = \frac{1}{2} \angle CAB = 30^\circ$

$\therefore \angle DOB = 2\angle DAB = 60^\circ$

又 $\because \odot O$ 中, $OB = OD$,

$\therefore \triangle OBD$ 为等边三角形,

$\therefore \odot O$ 直径为 10,

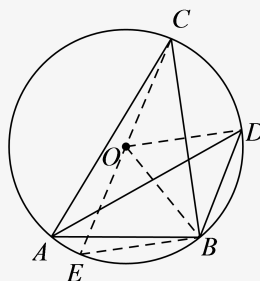
$\therefore BD = OB = 5$,

作直径 CE , 连接 EB , $\angle CBE = 90^\circ$,

$\because \widehat{CB} = \widehat{CB}$,

$\therefore \angle CEB = \angle CAB = 60^\circ$,

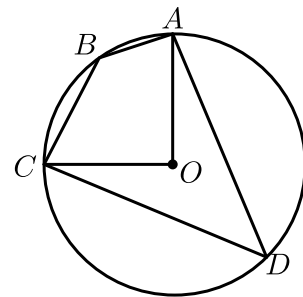
$\therefore BC = \sin 60^\circ \cdot CE = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$.



【标注】【知识点】圆与勾股

21. 2020~2021学年天津河西区初三上学期期中第8题3分 ★★

如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\angle B = 135^\circ$ ，则 $\angle AOC$ 的度数为（ ）。



- A. 60° B. 90° C. 100° D. 120°

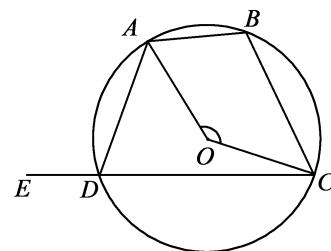
【答案】 B

【解析】 $\because \angle B = 135^\circ$ ，
 四边形 $ABCD$ 的内接于圆 O ，
 $\therefore \angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 135^\circ$ ，
 $\angle D = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOC = 2\angle D = 90^\circ$ 。
 故选 B。

【标注】 【知识点】 圆周角定理以及应用

22. 2020~2021学年天津河北区初三上学期期末第5题3分 ★★

如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ， E 为 CD 延长线上一点，若 $\angle ADE = 110^\circ$ ，则 $\angle AOC$ 的度数是（ ）。



- A. 70° B. 110° C. 140° D. 160°

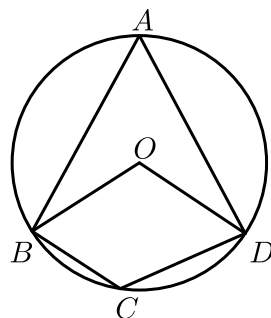
【答案】 C

【解析】 $\because \angle ADE = 110^\circ$ ，
 $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOC = 2\angle ADC = 140^\circ$ 。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

23. 2020~2021学年天津南开区初三上学期期中第7题3分 ★★

如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，连接 OB ， OD ．若 $\angle BOD = \angle BCD$ ，则 $\angle BAD$ 的度数为（ ）．



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 120°

【答案】C

【解析】设 $\angle BAD = \theta$ ，则 $\angle BOD = 2\theta$

$$\because \angle BCD = \angle BOD$$

$$\therefore \angle BCD = 2\theta$$

$$\text{又} \because \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ \text{ 即 } 3\theta = 180^\circ$$

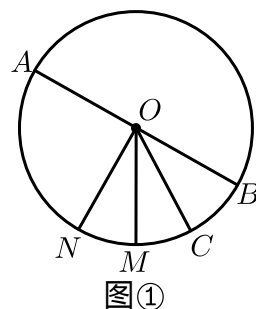
$$\therefore \theta = 60^\circ, \text{ 即 } \angle BAD = 60^\circ.$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

24. 2020~2021学年天津和平区初三上学期期中第20题8分 ★★★

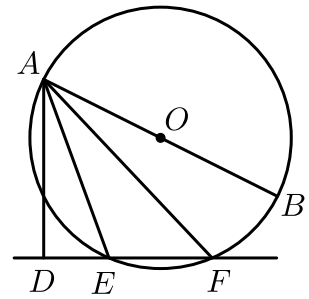
已知 AB 是 $\odot O$ 的直径．

(1) 如图①， $\widehat{BC} = \widehat{CM} = \widehat{MN}$ ， $\angle MON = 35^\circ$ ，求 $\angle AON$ 的大小．



图①

(2) 如图②， E ， F 是 $\odot O$ 上的两个点， $AD \perp EF$ 于点 D ，若 $\angle DAE = 20^\circ$ ，求 $\angle BAF$ 的大小．



【答案】(1) 75° .

(2) 20° .

【解析】(1) 在 $\odot O$ 中 ,

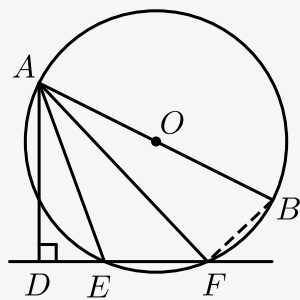
$$\because \widehat{BC} = \widehat{CM} = \widehat{MN} ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle COM = \angle MON = 35^\circ ,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径 ,

$$\therefore \angle AON = 180^\circ - \angle BOC - \angle COM - \angle MON = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 75^\circ .$$

(2) 如图 , 连接 BF



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径 ,

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAF = 90^\circ - \angle B .$$

$\because \angle AEF$ 为 $\text{Rt}\triangle ADE$ 的一个外角 , $\angle DAE = 20^\circ$,

$$\therefore \angle AEF = \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ ,$$

在 $\odot O$ 中 , 四边形 $ABFE$ 是圆内接四边形 ,

$$\text{有 } \angle AEF + \angle B = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAF = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ .$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】圆内接四边形的性质定理